Аналитичка геометрија

1. Тачке $D(2,3)$, $E(-1,2)$ и $F(4,5)$ су редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Одредити координате тачке A.

2. Ако је $A(3,-2)$ и $B(9,10)$, одредити координате тачке C која је на дужи AB тако да $AC : BC = 1 : 2$.

3. Одредити параметар p тако да тачке $A(1,2)$, $B(5,p)$ и $C(p,7)$ из првог квадранта буду колинеарне.

4. Одредити колико је пресечна тачка правих $2x+y-1=0$ и $x-y+4=0$ удаљена од праве $x+2y=0$.

5. Одредити тачку праве $4x+3y-12=0$ која је подједнако удаљена од тачака $A(-1,-2)$ и $B(1,4)$.

6. Ако су тачке $A(7,1)$ и $B(-1,3)$ темена основице једнакокраког троугла ABC и тачка C припада правој $x-y-4=0$, одредити производ координата тачке C.

7. Ако права дата једначином $\lambda x+(\lambda+3)y-\mu=0$ садржи тачку $A(5,2)$ и са координатним осама у првом квадранту гради троугао површине 20, одредити $\lambda+\mu$.

8. Ако је права $(3a-4b+2)x+(5a+3b-1)y+4a-2b=0$ паралелна y–оси и садржи тачку $A(1,1)$, одредити збир параметра a и b.

9. Одредити тачку која је симетрична тачки $A(1,3)$ у односу на праву која је одређена тачкама $B(8,2)$ и $C(-4,-7)$.

10. Два наспрамна темена квадрата $ABCD$ су тачке $A(-1,3)$ и $C(5,1)$. Одредити једначину праве којој припада дијагонала BD.

11. За које вредности $a \in \mathbb{R}$ права $ax+2y-b=0$ сече праву $2x-y+8=0$ под углом од $45°$?

12. Одредити једначину праве која је симетрична правој $2x-y+5=0$ у односу на y–осу.

13. Ако је $B(-1,1)$ теме троугла ABC чија висина h_a припада правој $x+y-6=0$, а тежишна дужt_a правој $2x+y+4=0$, одредити дужину странице BC.

14. За које $\lambda \in \mathbb{R}$ једначина $x^2-2x+y^2-6y=\lambda$ представља једначину кружнице?

15. Одредити најмање растојање између две тачке од којих једна припада кругу $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ а друга кругу $(x+4)^2+(y-5)^2=9$.

16. Одредити једначину праве којој припада тетива круга $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, чије је средиште тачка $A(3,0)$.

17. Одредити једначину кружнице са центром $C(3,-1)$ која на правој $2x-5y+18=0$ одсеца тетиву дужине 6.

18. Одредити тачку криве $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ која је најближа правој $x-y+3=0$.

19. Одредити једначину кружнице која додирује x–осу у тачки $A(3,0)$ и која садржи тачку $B(3+\sqrt{3},-1)$.

20. Под којим углом се кружница $x^2+y^2=16$ види из тачке $A(0,8)$?

21. Одредити полупречник круга који додирује праве $2x+y+2=0$ и $2x+y-18=0$.

22. За које вредности параметра k права $y = k(x+5)$ сече кружницу $x^2 + y^2 = 9$.

23. Одредити једначине тангенти елипсе $3x^2 + 8y^2 = 45$ које су на одстојању 3 од координатног почетка.

24. Израчунати поврашину троугла који образују симетрале првог и другог квадранта и тангента на хиперболу $x^2 - y^2 = 5$ у тачки $M(3, 2)$.

25. Одредити тачку хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 72$ која је најближа правој $3x + 2y + 1 = 0$.

26. Одредити једначину параболе која садржи тачке пресека праве $x - y = 0$ и круга $x^2 + y^2 - 4y = 0$, а која је симетрична у односу на x-осу.

27. Међу тачкама параболе $y = x^2 + 4x + 7$ тачка T је најближа правој p, чија је једначина $y = 2x - 9$. Одредити растојање тачке T од праве p.

28. Под којим углом се секу криве $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ и $y^2 = 16x$?

29. ДужAB дужине 12 клизи крајем A по оси Oy, а крајем B по оси Ox. Одредити једначину геометријског места тачака M дужи AB таквих да је $AM = 8$.

30. Одредити једначину геометријског места тачака центара кругова који додирују праву $y + 4 = 0$ и круг $x^2 + y^2 = 4$ споља.

Решења задатака

1. На слици 1 може се уочити да је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA}$. Како је ED средња линија троугла ABC, онда је $|ED| = \frac{1}{2}|AB| = |AF|$ и $ED \parallel AF$, па је $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DE}$. Према томе је

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OF} + (-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OF} + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}).$$

Коначно је $\overrightarrow{OA} = (4,5) + (-1,2) - (2,3) = (1,4)$, па је $A(1,4)$.

2. Како је $\overrightarrow{AB} = (9-3, 10-(-2)) = (6,12)$ и како је $\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2}$, следи да је $\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = (2,4)$. Даље је $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (3,-2) + (2,4) = (5,2)$, па је $C(5,2)$.

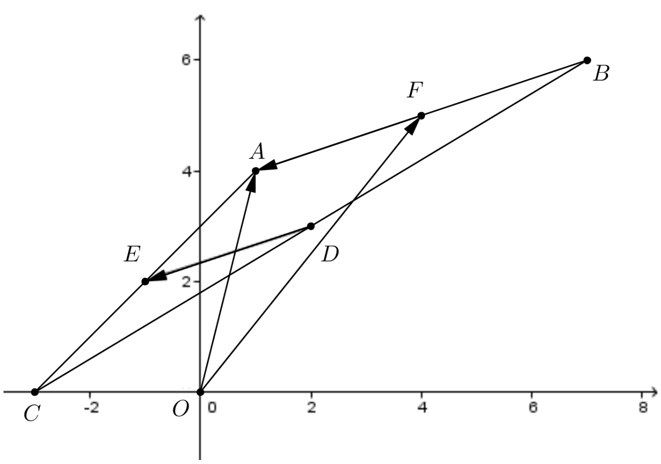
3. Важи да је

$$\overrightarrow{AB} = (5-1, p-2) = (4, p-2), \qquad \overrightarrow{AC} = (p-1, 7-2) = (p-1, 5), \qquad \overrightarrow{BC} = (p-5, 7-p).$$

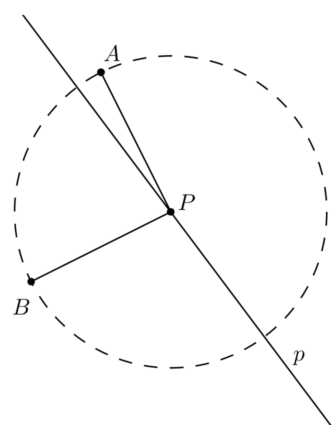
Одатле, да би тачке биле колинеарне мора да важи да је

$$\frac{4}{p-1} = \frac{p-2}{5}, \qquad \frac{4}{p-5} = \frac{p-2}{7-p}, \qquad \frac{p-1}{p-5} = \frac{5}{7-p}.$$

Долазимо до квадртне једначине $p^2 - 3p - 18 = 0$, чија су решења $p = 6$ или $p = -3$. Пошто су тачке A, B и C у првом квадранту, онда је $p = 6$ тражена вредност параметра.



Слика 1



Слика 2

4. Координате пресечне тачке одређујемо решавањем система

$$\begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ x - y + 4 &= 0, \end{aligned}$$

чије је решење уређени пар $(x, y) = (-1, 3)$, па је $P(-1, 3)$. Подсетимо се да, ако је дата тачка $P(x_0, y_0)$ и права $Ax + By + C = 0$, онда је растојање те тачке од дате праве

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Одатле је $d = \dfrac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5}$.

5. Нека је $P(x_0, y_0)$ тачка праве $4x + 3y - 12 = 0$, која је подједнако удаљена од тачака $A(-1, -2)$ и $B(1, 4)$ (слика 2). Подсетимо се да је једначина кружнице са центром у тачки $C(x_0, y_0)$ полупречника r дата са

$$k : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

С обзиром на то да су тачке A и B подједнако удаљене од тачке P, оне леже на кружници са центром у тачки P (слика 2). Одатле је

$$(-1 - x_0)^2 + (-2 - y_0)^2 = AP^2$$

и

$$(1 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = BP^2,$$

а како је $AP = BP$, онда је

$$(-1 - x_0)^2 + (-2 - y_0)^2 = (1 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2.$$

Како $P \in p$, такође је $4x_0 + 3y_0 - 12 = 0$. Решавањем система који чине последње две једначине, добија се да је $x_0 = 3$ и $y_0 = 0$, па је $P(3, 0)$.

6. Слично претходном задатку, долази се до $C(2, -2)$, па је производ координата тачке C једнак -4.

7. Нека је $a : \lambda x + (\lambda + 3)y - \mu = 0$. С обзиром на то да $A \in a$, онда је

$$5\lambda + 2\lambda + 6 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 7\lambda + 6.$$

Права a са координатним осама формира правоугли троугао површине $\dfrac{x_0 y_0}{2} = 20$ (слика 3). За $x = 0$, из једначине праве a следи да је

$$(\lambda + 3)y_0 - \mu = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{\mu}{\lambda + 3}.$$

Такође, за $y = 0$, следи да је

$$\lambda x_0 - \mu = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Одатле је

$$\frac{x_0 y_0}{2} = 20 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{\lambda(\lambda + 3)} = 40 \Leftrightarrow (7\lambda + 6)^2 = 40\lambda(\lambda + 3)$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Коначно је $\mu = 7\lambda + 6 = 20$, па је $\lambda + \mu = 22$.

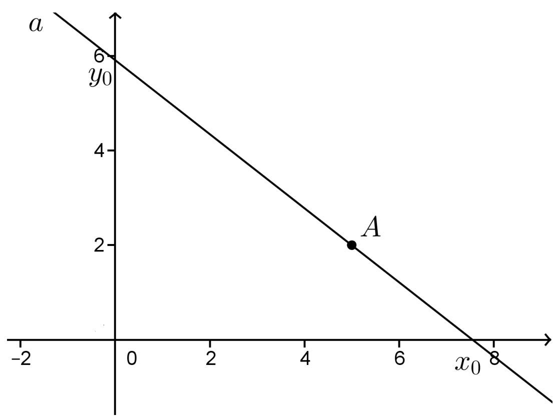
8. Како је права $p:\ (3a-4b+2)x+(5a+3b-1)y+4a-2b=0$ паралелна $y-$оси, онда је $5a+3b-1=0$. Са друге стране, како $A\in p$, онда је

$$(3a-4b+2)\cdot 1+(5a+3b-1)\cdot 1+4a-2b=0 \Leftrightarrow 12a-3b+1=0.$$

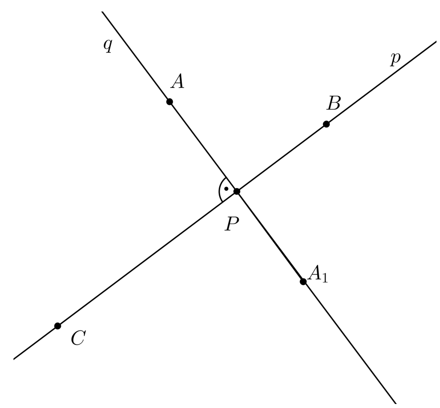
Решавајући систем

$$\begin{aligned} 5a+3b-1&=0,\\ 12a-3b+1&=0, \end{aligned}$$

добијамо да је $a=0$ и $b=\dfrac{1}{3}$, па је $a+b=\dfrac{1}{3}$.



Слика 3



Слика 4

9. Подсетимо се да је једначина праве p која пролази кроз две тачке са координатама (x_1,y_1) и (x_2,y_2)

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Нека је p права одређена тачкама $B(8,2)$ и $C(-4,-7)$. Онда је

$$p:\ y+7=\frac{2+7}{8+4}(x+4),$$

односно

$$p:\ y=\frac{3}{4}x-4.$$

Права q садржи тачку A и нормална је на праву p (слика 4), па за њихове коефицијенте праваца k_q и k_p важи да је $k_q=-\dfrac{1}{k_p}=-\dfrac{1}{\frac{3}{4}}=-\dfrac{4}{3}$. Ако праву q представимо у облику $y=k_qx+n$, узимајући у обзир да $A\in q$, онда је

$$3=-\frac{4}{3}\cdot 1+n \Leftrightarrow n=\frac{13}{3}.$$

Дакле,

$$q:\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{13}{3}.$$

Координате пресечне тачке P правих p и q одређујемо решавањем система једначина те две праве, па је $P(4,-1)$. Нека је $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$ тачка која је симетрична тачки A у односу на праву p. Како је тачка P средиште дужи AA_1, онда је

$$\frac{x_A + x_{A_1}}{2} = x_P \Leftrightarrow \frac{1 + x_{A_1}}{2} = 4 \Leftrightarrow x_{A_1} = 7$$

и

$$\frac{y_A + y_{A_1}}{2} = y_P \Leftrightarrow \frac{3 + y_{A_1}}{2} = -1 \Leftrightarrow y_{A_1} = -5,$$

па је $A_1(7,-5)$.

10. Користећи чињеницу да се дијагонале квадрата полове и да су међусобно нормалне, слично као у претходном задатку, долази се до једначине $y = 3x - 4$.

11. Подсетимо се да за угао φ, који заклапају праве $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$, важи да је

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Из једначине праве $2x-y+8=0$ видимо да је $k_1 = 2$, а из једначине праве $ax+2y-b=0$ следи да је $k_2 = -\dfrac{a}{2}$, па је

$$\mathrm{tg}45^\circ = \left|\frac{-\frac{a}{2} - 2}{1 - 2\cdot\frac{a}{2}}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\frac{-a-4}{2(1-a)}\right|,$$

одакле је

$$\frac{-a-4}{2(1-a)} = 1 \Leftrightarrow a = 6$$

или

$$\frac{-a-4}{2(1-a)} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

12. Координате тачака P и A (слика 5) добијамо редом решавањем система

$$\begin{aligned} 2x - y + 5 &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 2x - y + 5 &= 0, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

па је одатле $P(0,5)$ и $A\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$. Ако са b означимо праву која је симетрична правој $2x - y + 5 = 0$ у односу на y-осу и са B пресек праве b и x-осе, онда тачка B мора да буде симетрична тачки A у односу на $(0,0)$, па је $B\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$. Како $B \in b$ и $P \in b$, онда је

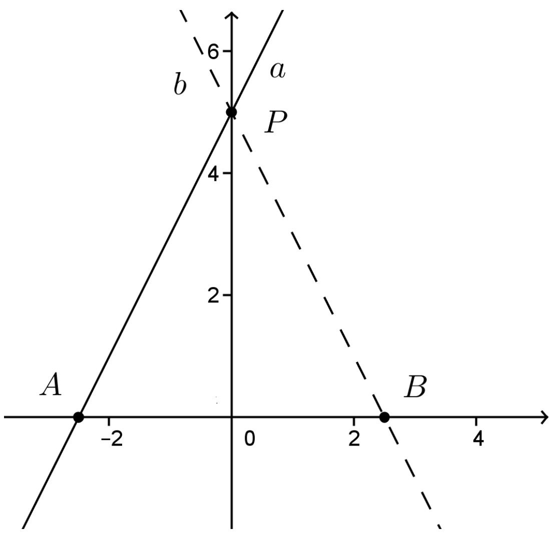
$$b:\; y - 0 = \frac{5-0}{0-\frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right),$$

односно

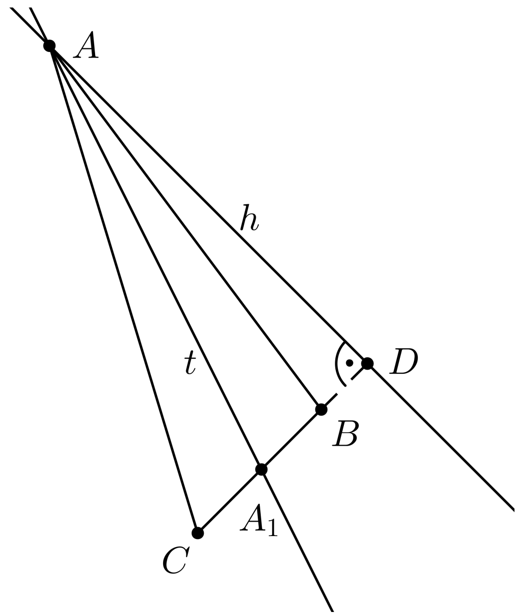
$$b:\ y=-2\left(x-\frac{5}{2}\right),$$

па је коначно

$$b:\ y+2x-5=0.$$



Слика 5



Слика 6

13. Нека је $h:\ x+y-6=0$ и $t:\ 2x+y+4=0$ (слика 6). Посматрајмо праву одређену тачкама B и C. Нека је њена једначина $y=kx+n$. Ова права је нормална на праву h, па за њихове коефицијенте праваца важи да је $k=-\dfrac{1}{k_h}=-\dfrac{1}{-1}=1$. С обзиром на то да $B\in BC$, онда је $1=1\cdot(-1)+n$, па је $n=2$. Решавањем система једначина правих BC и t, односно система

$$y-x-2=0,$$
$$2x+y+4=0,$$

долазимо до решења $x=-2$, $y=0$, па је $A_1(-2,0)$. Сада је $\overrightarrow{BA_1}=(-2+1,0-1)=(-1,-1)$, па је $|\overrightarrow{BA_1}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Како је BA_1 половина странице BC, онда је $|BC|=2\sqrt{2}$.

14. Како је

$$\begin{aligned}x^2-2x+y^2-6y=\lambda &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-3)^2-9=\lambda\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=\lambda+10.\end{aligned}$$

Да би дата једначина била једначина кружнице, $\lambda+10$ треба да буде квадрат њеног полупречника, па је $\lambda+10>0$, односно $\lambda>-10$.

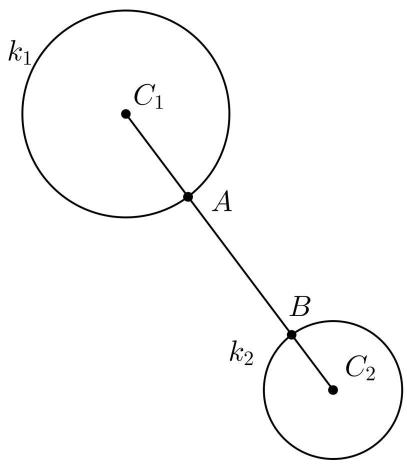
15. Ако је $k_1 : (x-2)^2+(y+3)^2 = 4$ и $k_2 : (x+4)^2+(y-5)^2 = 9$ (слика 7), тада је центар кружнице k_1 тачка $C_1(2,-3)$, а центар кружнице k_2 тачка $C_2(-4,5)$. Одатле је

$$\overrightarrow{C_1C_2} = (-4-2, 5+3) = (-6, 8)$$

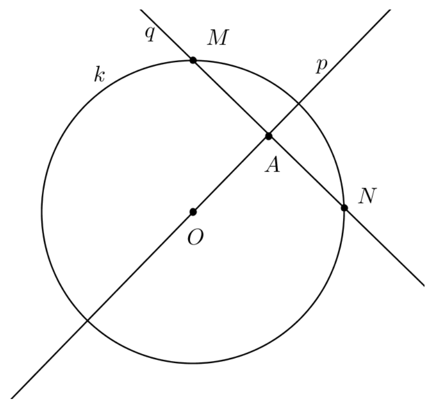
и

$$|\overrightarrow{C_1C_2}| = \sqrt{36+64} = 10.$$

Најмање растојање између кружница је $|AB| = 10 - r_1 - r_2 = 10 - 2 - 3 = 5$.



Слика 7



Слика 8

16. Једначину кружнице $k : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ можемо записати у облику $(x-2)^2+(y+1)^2 = 4$. Симетрала тетиве MN (означимо је са p) садржи тачку A и центар кружнице O (слика 8), па је, из једначине праве кроз две тачке

$$p : y+1 = \frac{0+1}{3-2}(x-2),$$

односно

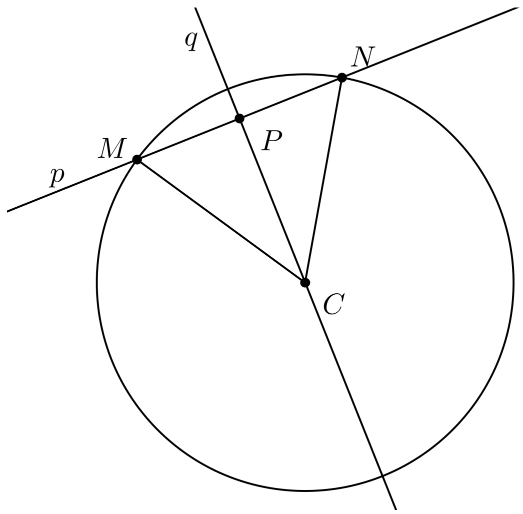
$$p : y = x - 3.$$

Како је права која садржи тетиву MN (означимо је са q) нормална на праву p, онда је њен коефицијент правца $k_q = -\dfrac{1}{k_p} = -\dfrac{1}{1} = -1$. Нека је $q : y = k_q x + n$. Пошто q садржи тачку $A(3,0)$, онда је $0 = -1 \cdot 3 + n$, па је $n = 3$ и $q : y = -x + 3$.

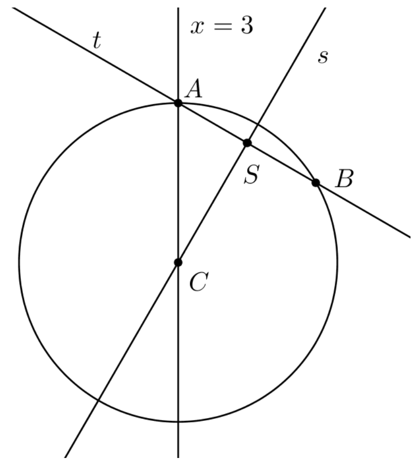
17. Права $p : 2x - 5y + 18 = 0$ садржи тетиву MN кружнице k (слика 9) и $|MN| = 6$. Нека је $q : y = kx + n$ симетрала тетиве MN. Она је нормална на p, па је

$$k = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}.$$

Како $C \in q$, онда је $-1 = -\dfrac{5}{2} \cdot 3 + n$, односно $n = \dfrac{13}{2}$, па је $q : y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{13}{2}$. Како је $p \cap q = \{P\}$, координате тачке P добијамо решавањем система једначина правих p и q,



Слика 9



Слика 10

одакле је $P(1,4)$. Онда је $|CP| = \sqrt{(1-3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{29}$. Како је $|MP| = \dfrac{6}{2} = 3$ и како је $\triangle MPC$ правоугли, онда је полупречник кружнице k

$$r = |CM| = \sqrt{9+29} = \sqrt{38}.$$

Коначно,

$$k : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 38.$$

18. Тражена тачка налази се у пресеку кружнице и праве која пролази кроз центар кружнице и нормална је на дату праву $x - y + 3 = 0$. Решење је $P(2-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

19. Нека је s симетрала тетиве AB (слика 10). Она је нормална на праву p, која садржи ту тетиву и на њој се налази центар кружнице $C(x,y)$. Такође, $s \cap t = \{S\}$, што представља тачку која полови AB. Одатле је

$$S\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right),$$

односно $S\Big(3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$. Једначина праве t је

$$y - (-1) = \frac{-1-0}{3+\sqrt{3}-3}(x - (3+\sqrt{3})),$$

односно

$$t : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3).$$

Коефицијент правца праве t је $k_t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Одатле је $k_s = -\dfrac{1}{k_t} = \sqrt{3}$. Како $S \in s$, онда је

$$-\frac{1}{2} = 3\sqrt{3} + \frac{3}{2} + n \Leftrightarrow n = -3\sqrt{3} - 2,$$

па је
$$s: y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}-2.$$

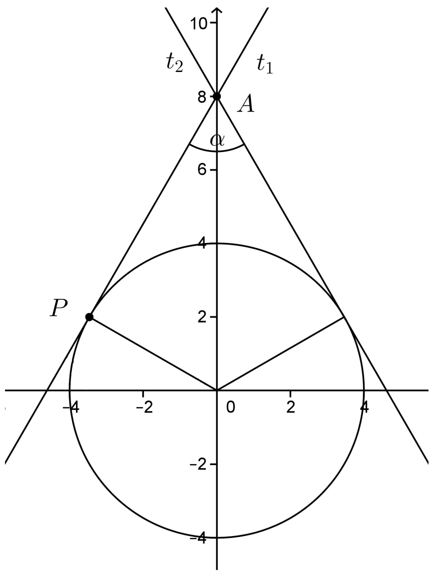
Центар кружнице налази се у пресеку праве s и праве $x=3$, па се решавањем система добија $C(3,-2)$. Коначно је
$$k:(x-3)^2+(y+2)^2=4.$$

20. Угао α под којим се кружница $x^2+y^2=16$ види из тачке $A(0,8)$ је угао који заклапају тангенте t_1 и t_2 кружнице k из тачке A (слика 11). Ако је $t: y=kx+n$, онда је $n=8$. Растојање тангенте t од центра кружнице $C(0,0)$ једнако је дужини полупречника кружнице, тј.
$$d(C,p)=\frac{|y_c-kx_c-8|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|0-k\cdot 0-8|}{\sqrt{k^2+1}}=4,$$
одакле је $k^2+1=4$, па је $k=\pm\sqrt{3}$ и то су коефицијенти праваца тангенти t_1 и t_2. Одатле је
$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}\right|=\sqrt{3},$$
па је $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

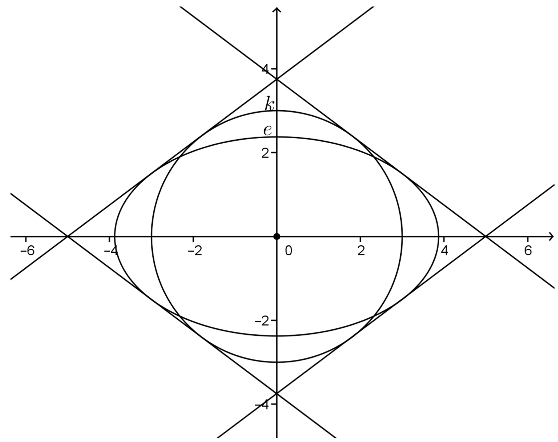
21. Решење: $r=2\sqrt{5}$.

22. Ако права $y=k(x+5)$ сече кружницу $x^2+y^2=9$, онда систем
$$x^2+y^2=9,$$
$$y=k(x+5),$$
има два решења. Заменом друге у прву једначину, долази се до квадратне једначине
$$(1+k^2)x^2+10k^2x+25k^2-9=0.$$
Да би ова једначина имала два реална решења мора да важи да је
$$D=(10k^2)^2-4(1+k^2)(25k^2-9)=36-64k^2>0,$$
односно $k^2-\dfrac{9}{16}<0$. Ова неједнакост је задовољена ако је $k\in\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$.

23. Подсетимо се да је једначина елипсе
$$e:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
при чему је $c^2=a^2-b^2$, а тачке $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ су жиже елипсе. Права $y=kx+n$ је тангента елипсе ако је испуњен услов додира
$$a^2k^2+b^2=n^2.$$



Слика 11



Слика 12

Такође, права $y = kx + n$ је тангента кружнице $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ако је испуњен услов додира

$$r^2(k^2 + 1) = (kx_0 - y_0 + n)^2.$$

Једначина дате елипсе може се записати у облику

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{\frac{45}{8}} = 1,$$

па је $a^2 = 15$ и $b^2 = \dfrac{45}{8}$. Све тачке које су на растојању дужине 3 од координатног почетка припадају кружници k: $x^2 + y^2 = 9$ (слика 12). Према томе тражене тангенте биће заједничке тангенте елипсе e и кружнице k. Према томе, треба да буде задовољен услов додира елипсе и тангенте

$$15k^2 + \frac{45}{8} = n^2,$$

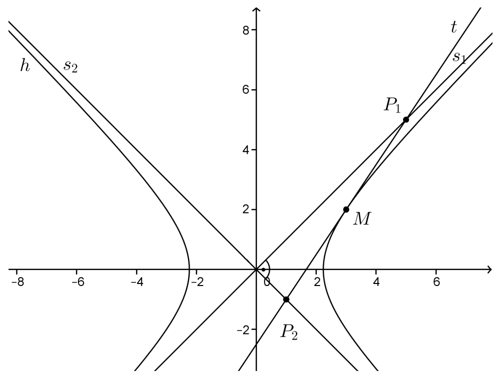
и услов додира кружнице и тангенте

$$9(1 + k^2) = n^2.$$

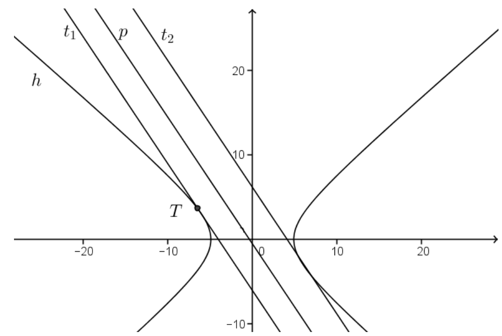
Одатле је

$$15k^2 + \frac{45}{8} = 9(1 + k^2),$$

односно $k^2 = \dfrac{9}{16}$, па је $k = \pm\dfrac{3}{4}$, а онда је $n = \pm\dfrac{15}{4}$. Дакле, тражене тангенте имају једначине $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{4}$, $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{4}$, $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{4}$ и $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{4}$.



Слика 13



Слика 14

24. Подсетимо се да је једначина хиперболе

$$h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

при чему је $c^2 = a^2 + b^2$, а тачке $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ су жиже хиперболе. Једначина дате хиперболе може се записати у облику

$$h : \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1,$$

па је $a^2 = b^2 = 5$. Такође, подсетимо се да је једначина тангенте хиперболе у њеној тачки $M(x_1, y_1)$

$$t : \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

па је одатле

$$t : \frac{3x}{5} - \frac{2y}{5} = 1,$$

односно $t : 3x-2y = 5$ (слика 13). Како је $s_1 \cap t = \{P_1\}$, решавањем система једначина правих s_1 и t, добија се $P_1(5, 5)$. Слично је $s_2 \cap t = \{P_2\}$, па је $P_2(1, -1)$. Коначно је

$$P = \frac{|OP_1| \cdot |OP_2|}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5.$$

25. Тангенте паралелне правој $p : y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ (слика 14) имају коефицијент правца $k = -\frac{3}{2}$, односно $t : y = -\frac{3}{2}x + n$. Одатле је, након квадрирања једначине,

$$4y^2 = 9x^2 - 12nx + 4n^2.$$

Решавањем система

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4y^2 &= 72, \\ y &= -\frac{3}{2}x + n, \end{aligned}$$

долази се до квадратне једначине $6x^2 - 12nx + 4n^2 + 72 = 0$. С обзиром на то да је пресек тангенте t и хиперболе h једна тачка, онда ова квадратна једначина треба да има једно решење, тј. њена дискриминанта треба да буде једнака нула. Из тог услова добија се да је $n^2 = 36$, односно да је $n = \pm 6$. Према томе, тангенте хиперболе, паралелне правој p су

$$t_1 : y = -\frac{3}{2}x - 6$$

и

$$t_2 : y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Тангента ближа правој p је t_1, па је $t_1 \cap h = \{T\}$ тражена тачка, чије кординате добијамо решавањем система

$$3x^2 - 4y^2 = 72,$$
$$y = -\frac{3}{2}x - 6.$$

Одатле је $T(-6, 3)$.

26. Једначина параболе, чија је жижа тачка $F(\frac{p}{2}, 0)$, дата је са

$$y^2 = 2px.$$

Координате тачака пресека праве $x - y = 0$ и круга $x^2 + y^2 - 4y = 0$ добијамо решавањем система њихових једначина. Решења су $(x, y) = (0, 0)$ и $(x, y) = (2, 2)$. Из чињенице да парабола садржи тачку са координатама $(2, 2)$, следи да је $4p = 4$, па је $p = 1$, а једначина параболе је $y^2 = 2x$.

27. Решење: $d(T, p) = 3\sqrt{5}$.

28. Треба одредити угао који заклапају тангента хиперболе и тангента параболе у тачки пресека ове две криве. Решење: $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{3\sqrt{6}}{4} - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

29. Троугао AOB је правоугли (слика 15), па је $x^2 + y^2 = 12^2$. Уочимо да је $\triangle AMD \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle MBC$, па је

$$AM : MB = DM : CB \Leftrightarrow 2 : 1 = OC : CB \Leftrightarrow 2 : 1 = x_0 : (x - x_0) \Leftrightarrow x = \frac{3x_0}{2}$$

и

$$AM : MB = AD : MC \Leftrightarrow 2 : 1 = AD : MC \Leftrightarrow 2 : 1 = (y - y_0) : y_0 \Leftrightarrow y = 3y_0.$$

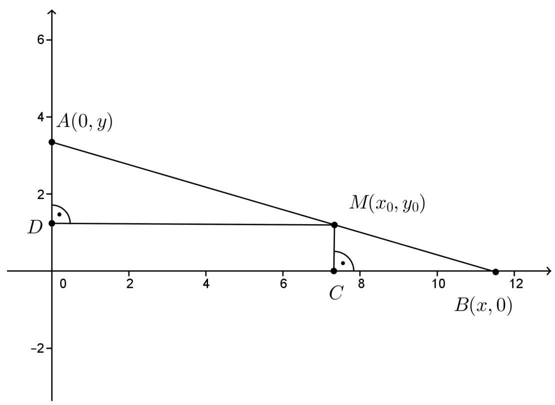
Одатле је

$$\left(\frac{3x_0}{2}\right)^2 + (3y_0)^2 = 144,$$

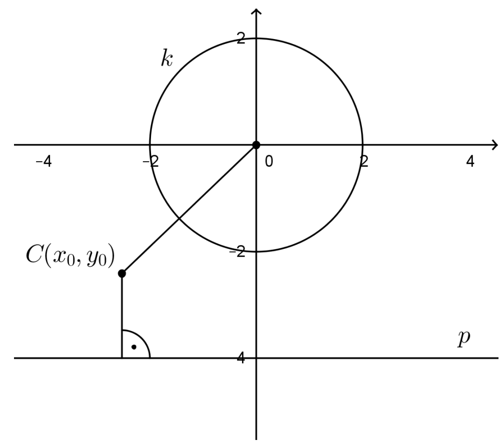
односно

$$\frac{x_0^2}{64} + \frac{y_0^2}{16} = 1.$$

Дакле тражено геометријско место тачака је елипса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.



Слика 15



Слика 16

30. Нека је $C(x_0, y_0)$ центар круга који додирује праву $p : y + 4 = 0$ и круг $k : x^2 + y^2 = 4$ споља (слика 16). Тада је $d(C, k) = d(C, p)$ па је

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 2 = \frac{|y_0 + 4|}{\sqrt{1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = y_0 + 6 \Leftrightarrow x_0^2 = 12y_0 + 36.$$

Уочимо да је $y_0 > -4$, зато што се тачка C налази изнад праве p, па је $y_0 + 4 > 0$. Тражено геометријско место тачака је парабола $y = \dfrac{x^2}{12} - 3$.

За сва питања можете се обратити путем мејла teodora.trifunovic@gmail.com.